

# SEMINAR MINGGUAN IRGSC

**Kamis, 20 Juni 2013**

## **MODEL MATEMATIKA PENULARAN TUBERKULOSIS DI KABUPATEN BELU NUSA TENGGARA TIMUR**



**OLEH**

**MARSELINUS U. FAHIK**

**(Math Department, Faculty of Science and Tech, UNDANA)**



# **PENDAHULUAN**



**Latar Belakang**



**Identifikasi dan Pembatasan Masalah**



**Tujuan dan Manfaat**

# **TINJAUAN PUSTAKA**

**Gambaran Umum tentang Tuberkulosis**

**Fakta Tuberkulosis**

**Studi Efektivitas Strategi DOTS di Indonesia**

**Gambaran Umum Kabupaten Belu**

**Teori Matematika Pendukung**

# METODE PENELITIAN

PEMODELAN MATEMATIKA  
DALAM PERSAMAAN DIFERENSIAL

Analisis Kualitatif



Merumuskan Model  
Matematika Penularan TB

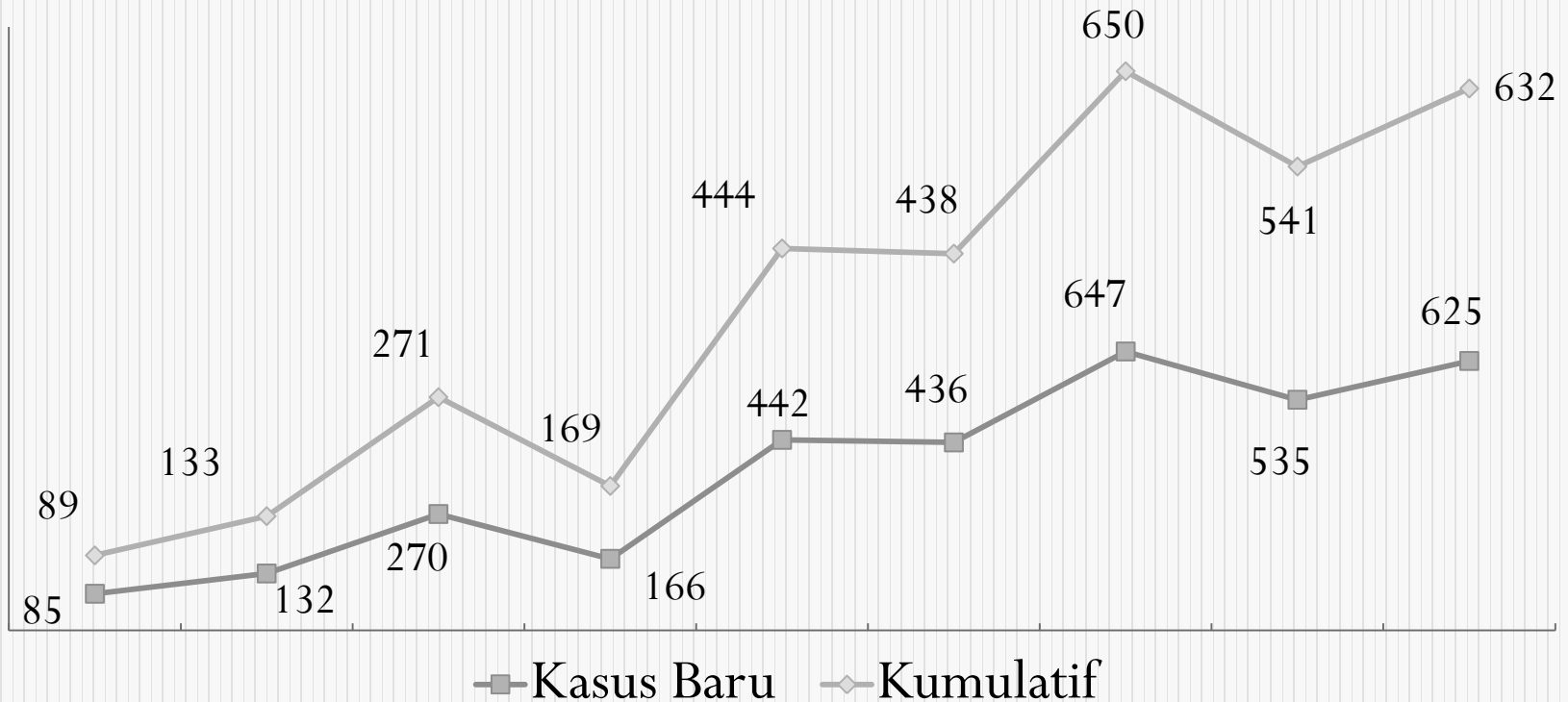
Aplikasi Model pada Kasus TB  
di  
Kabupaten Belu



Model diaplikasikan pada  
Kasus TB Kab. Belu

# HASIL DAN PEMBAHASAN

## □ Deskripsi Angka-angka Penularan TB di Kabupaten Belu



Dari grafik di atas tampak bahwa hingga akhir tahun 2008 jumlah kasus TB yang ditemukan di Kabupaten Belu tidak kurang dari 625. Hal ini menggambarkan bahwa masalah penularan TB di Kabupaten Belu masih perlu mendapat perhatian ekstra dari seluruh komponen masyarakat dan pemerintah.

## ❑ Deskripsi Penularan TB menurut Model Matematika

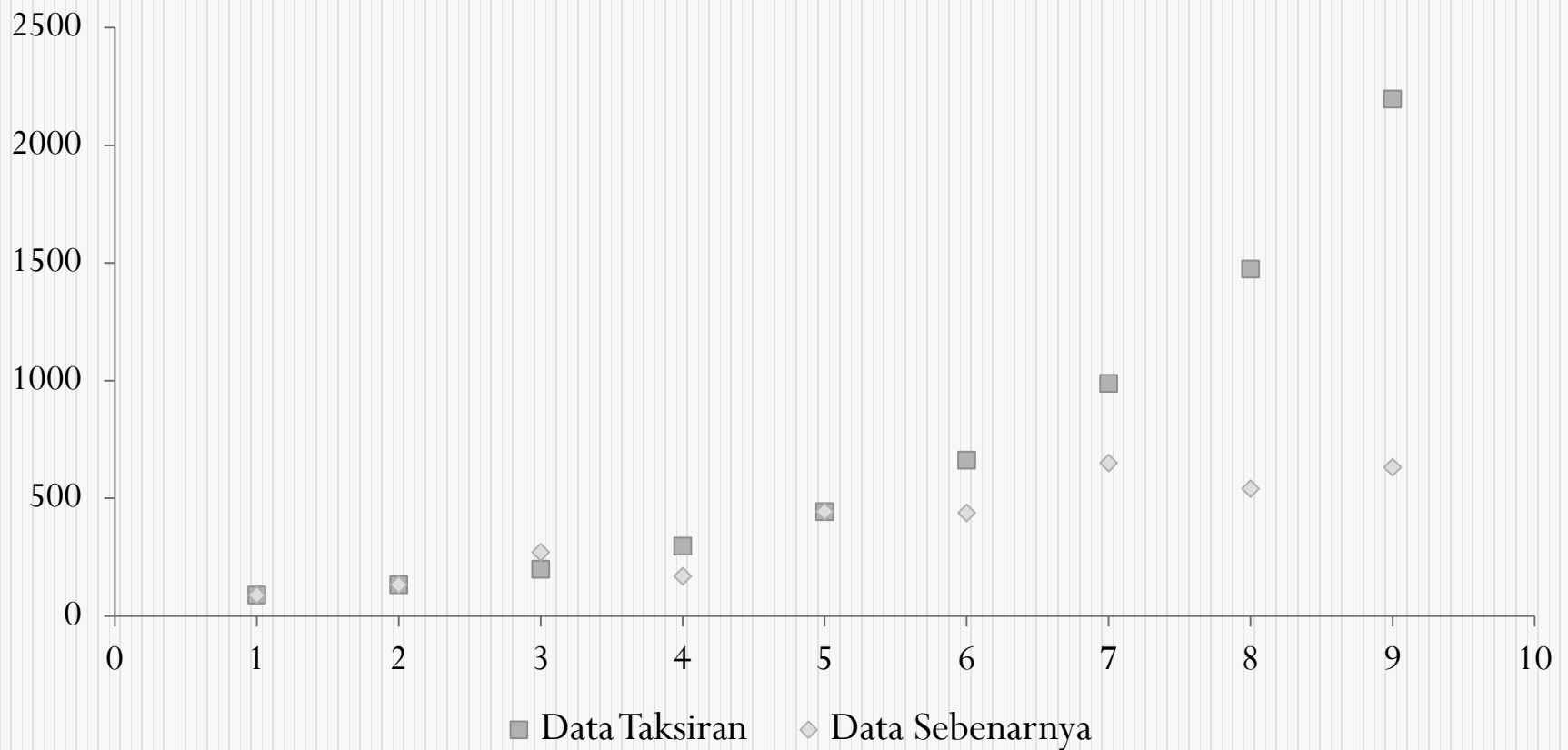
### Model Dinamika Populasi

$$\frac{dN}{dt} = \gamma N \longrightarrow N(t) = N_0 \exp(\gamma t)$$

$$\frac{dN}{dt} = \gamma N \left(1 - \frac{N}{N_\infty}\right) \longrightarrow N(t) = \frac{N_\infty}{\left\{1 + \left[\left(\frac{N_\infty}{N_0}\right) - 1\right] e^{-\gamma t}\right\}}$$

### Aplikasi Model pada Data Penularan TB Kabupaten Belu

$$N(t) = \frac{234774.7}{\{1 + 2636.9182e^{-0.401900261t}\}}$$



Dari grafik di atas terlihat adanya perbedaan yang sangat signifikan untuk perhitungan pada tahun 2006, 2007, dan 2008. Estimasi yang diperoleh dengan menerapkan model Verhulst pada ketiga tahun tersebut melebihi 2 sampai 3 kali lipat dari data sebenarnya. Ini menggambarkan bahwa model Verhulst yang diaplikasikan untuk masalah penularan TB di Kabupaten Belu kurang relevan dalam menjelaskan fenomena yang terjadi untuk jangka waktu yang lebih pendek.

## ❑ Membangun Model Penularan TB

### Model Prey Predator : Interaksi Negatif MyTB Versus Positif TB

Sifat interaksi kedua subpopulasi yang ditetapkan sebagai asumsi khusus adalah sebagai berikut.

- Ketidakhadiran individu-individu tertular MyTB/TB aktif dalam populasi prey menyebabkan populasi prey bertambah.
- Kehadiran individu-individu tertular MyTB/TB aktif dalam populasi prey akan menyebabkan populasi prey berkurang.
- Kehadiran sejumlah individu populasi prey dalam populasi predator akan menyebabkan bertambahnya populasi predator.

Model Prey Predator : Interaksi  
Negatif MyTB Versus Positif TB

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \gamma x^2 - \beta xy$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta xy - \delta y$$

$$x(0) > 0, y(0) > 0, \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$$



Titik Keseimbangan :  $T_1\left(\frac{\alpha}{\gamma}, 0\right)$   $T_2(x_0, y_0) \longrightarrow x_0 = \frac{\delta}{\beta}$   $y_0 = \frac{\alpha\beta - \gamma\delta}{\beta^2}$

Analisis Kestabilan : Matriks Jacobian Sistem

$$JT_1 = \begin{bmatrix} -\alpha & \frac{-\alpha\beta}{\gamma} \\ 0 & \frac{\alpha\beta}{\gamma} - \delta \end{bmatrix}$$



$$JT_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\gamma\delta}{\beta} & -\delta \\ \alpha - \frac{\gamma\delta}{\beta} & 0 \end{bmatrix}$$



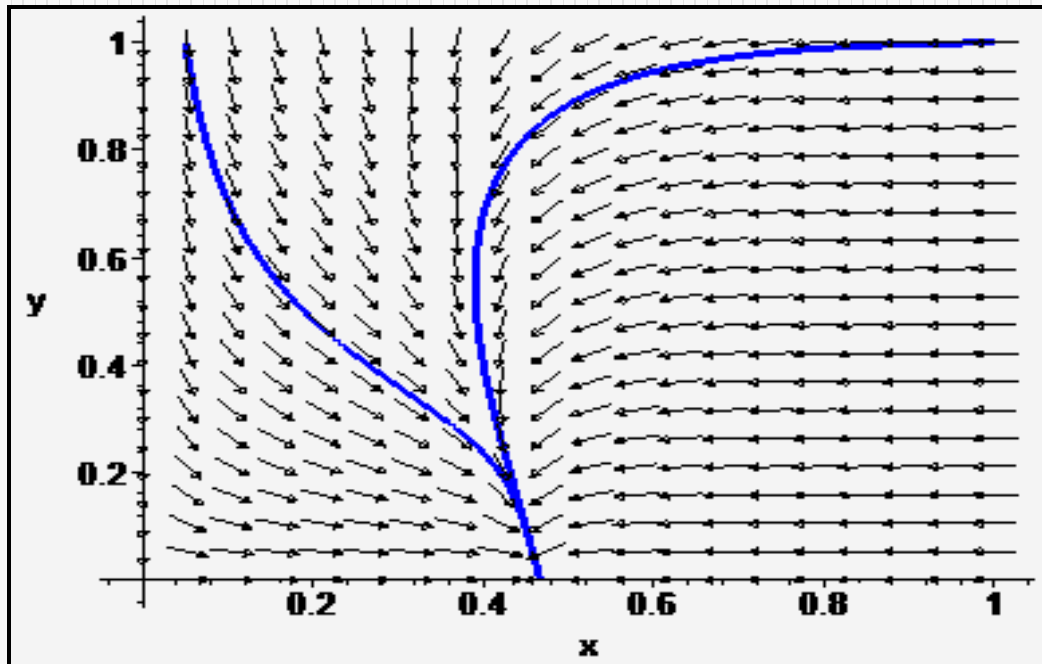
$$\lambda^2 + \left(\alpha - \frac{\alpha\beta}{\gamma} + \delta\right)\lambda + \alpha\left(-\frac{\alpha\beta}{\gamma} + \delta\right) = 0 \longrightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = -\alpha \\ \lambda_2 = \frac{\alpha\beta - \delta\gamma}{\gamma} \end{matrix}$$

$$\beta\lambda^2 + \gamma\lambda + \delta(\beta\alpha - \gamma\delta) = 0$$

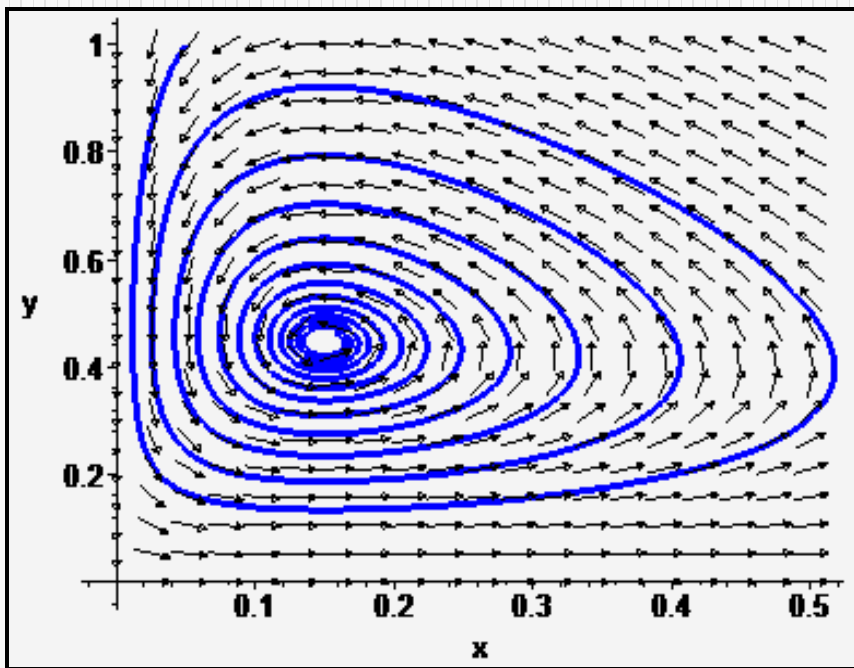
$$\lambda_1 = \frac{-\delta\gamma + \sqrt{\delta^2\gamma^2 - 4\delta\beta(\alpha\beta - \delta\gamma)}}{2\beta}$$

$$\lambda_2 = \frac{-\delta\gamma - \sqrt{\delta^2\gamma^2 - 4\delta\beta(\alpha\beta - \delta\gamma)}}{2\beta}$$

Analisis Data Hipotetik :

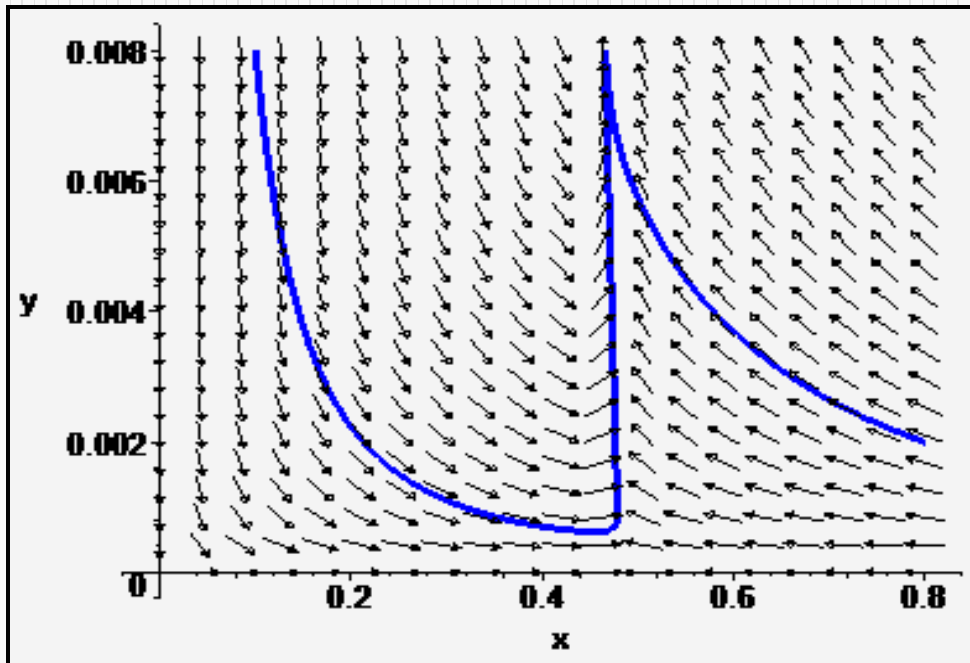


Phase Plane Titik Data Hipotetik yang Memenuhi Kondisi  $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\delta}{\beta}$



Phase Plane Titik Data Hipotetik yang Memenuhi Kondisi  $\delta^2 \gamma^2 < 4\delta\beta (\alpha\beta - \delta\gamma)$

Phase Plane Titik Data Hipotetik yang Memenuhi Kondisi  $\delta^2 \gamma^2 > 4\delta\beta (\alpha\beta - \delta\gamma)$



# Model SIRS Penularan : Interaksi Susceptible, Infectible, Recovery, Susceptible

Model SIRS Penularan TB

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta x^2 - \gamma xy + \delta z \quad \frac{dy}{dt} = \gamma xy - \mu z$$

$$\frac{dz}{dt} = \eta y - \rho z \quad x(0) > 0, y(0) > 0, z(0) > 0$$

Titik Keseimbangan :  $T_1(0,0,0)$   $T_2(\frac{\alpha}{\beta}, 0, 0)$   $T_3(x_0, y_0, z_0)$

Analisis Kestabilan : Matriks Jacobian Sistem

$$J(x, y, z) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \delta \\ 0 & 0 & -\mu \\ 0 & \eta & -\rho \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = \alpha$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{-\rho \pm \sqrt{\rho^2 - 4\eta\mu}}{2}$$

$$JT_2 = \begin{bmatrix} -\alpha & -\gamma\alpha/\beta & \delta \\ 0 & \gamma\alpha/\beta & -\mu \\ 0 & \eta & -\rho \end{bmatrix}$$

$$JT_3 = \begin{bmatrix} \alpha - \frac{2\beta\mu\eta}{\gamma\rho} + \frac{\mu(-\alpha\gamma\rho + \beta\mu\eta)}{\rho} & -\frac{\mu\eta}{\rho} & \delta \\ \frac{-\mu(-\alpha\gamma\rho + \beta\mu\eta)}{\gamma\rho(\mu - \delta)} & \frac{\mu\eta}{\rho} & -\mu \\ 0 & \eta & -\rho \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{\mu\eta}{\gamma\rho}$$

$$y = \frac{\mu(\beta\mu\eta - \alpha\gamma\rho)}{\rho\gamma^2(\delta - \mu)}$$

$$z = \frac{\eta\mu(\beta\mu\eta - \alpha\gamma\rho)}{\rho^2\gamma^2(\delta - \mu)}$$

$$\lambda^3 + (-\alpha + \rho)\lambda^2 + (-\alpha\rho + \eta\mu)\lambda - \alpha\eta\mu = 0$$

$$\beta\lambda^3 + (\alpha\beta + \beta\rho - \alpha\gamma)\lambda^2 - (\alpha(\beta\rho - \alpha\gamma) - \rho\alpha\gamma + \beta\mu\eta)\lambda + \alpha(-\alpha\gamma\rho + \beta\eta\mu) = 0$$

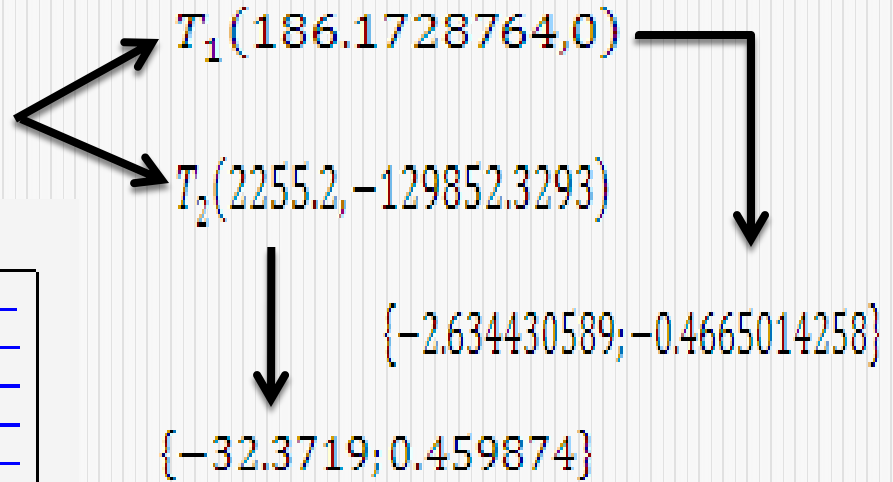
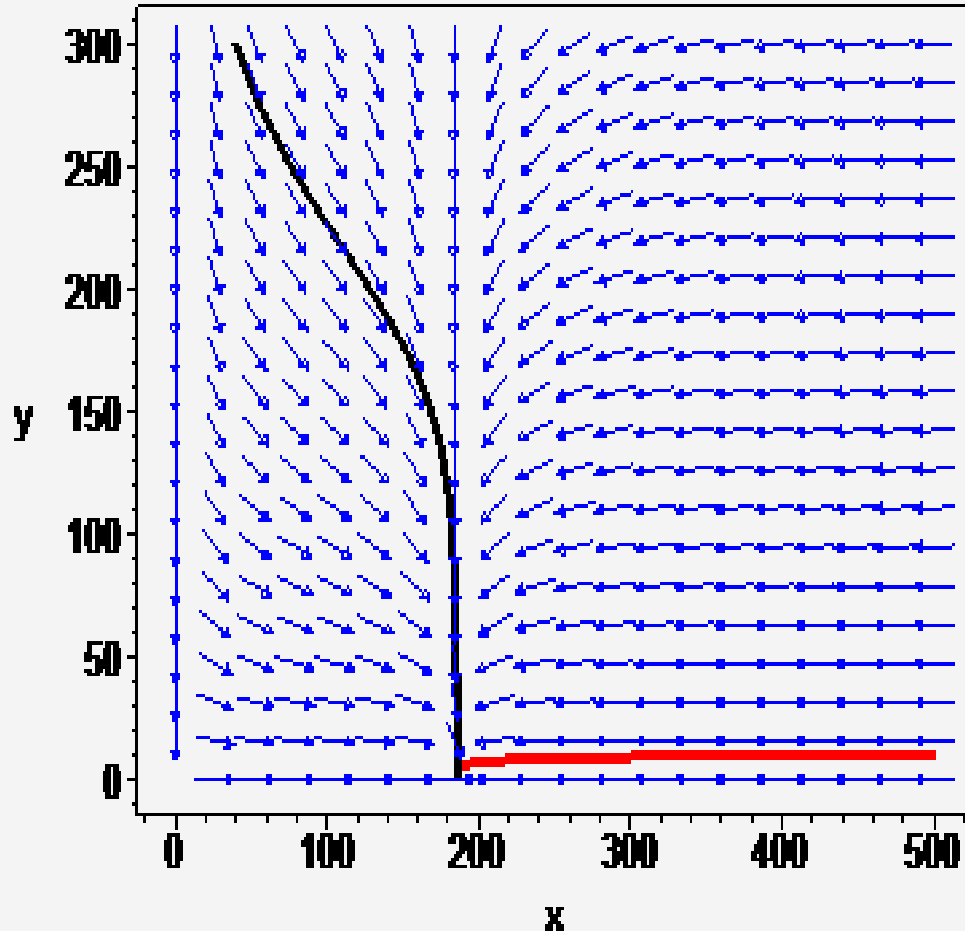
$$\{\lambda_1 = -\alpha\}, \left\{ \begin{aligned} \lambda_2 &= \frac{1 - \beta\rho + \gamma\alpha + \sqrt{\beta^2\rho^2 + 2\beta\rho\gamma\alpha + \gamma^2\alpha^2 - 4\beta^2\mu\eta}}{2} \\ \lambda_3 &= \frac{1 - \beta\rho + \gamma\alpha - \sqrt{\beta^2\rho^2 + 2\beta\rho\gamma\alpha + \gamma^2\alpha^2 - 4\beta^2\mu\eta}}{2} \end{aligned} \right\}$$

# □ Aplikasi Model Penularan TB pada Data MyTB/TB Kabupaten Belu

## Model Prey Predator Penularan TB

$$\alpha = 2.63443 \quad \beta = 0.000225 \quad \gamma = 0.014150 \quad \delta = 0.508477$$

**Gambar 6**



Phase Plane Aplikasi sistem Model Prey Predator pada Kasus Penularan TB Kabupaten Belu. Solusi Konvergen ke titik kesetimbangan.

## Model SIRS Penularan TB

$$\alpha = 21.148 \quad \beta = 0.0000142 \quad \gamma = 11.645935 \quad \eta = 11.645935 \quad \mu = 0.267048 \quad \delta = 31.27508 \quad \rho = 3.850$$

$$\begin{array}{l} T_1(0,0,0) \longrightarrow \{21.14809317; -1.153033293; -2.697255468\} \\ T_2(0.14831 \times 10^7, 0, 0) \longrightarrow \{-21.14809318; 1111.585313; -3.847500590\} \\ T_3(1077.765094; -242.8422589; -734.5228817) \longrightarrow \{21.17729007; 0.8279426253; -3.748424963\} \end{array}$$

### □ Implikasi Hasil Penelitian

Sistem model prey-predator seperti yang telah diuraikan sebelumnya dapat dijadikan sebagai gambaran mengenai kondisi masalah penularan TB di daerah Kabupaten Belu selama 9 tahun terakhir.

Dengan mengamati phase plane yang diberikan pada gambar 4, terlihat bahwa pada kasus penularan TB di Kabupaten Belu sebagai akibat interaksi antara populasi negatif atau suspek TB dengan populasi infektor TB mempunyai solusi yang konvergen menuju titik endemik.

Berbeda dengan model prey-predator yang hanya menjelaskan penularan TB sebagai interaksi antara populasi suspek dengan populasi infektor, model SIRS menjelaskan penularan TB dengan melibatkan satu populasi tambahan yaitu populasi *recovered* atau individu-individu yang sedang dirawat, telah sembuh, masih tersangka TB dan meninggal karena TB atau sebab-sebab lain. Tentu sistem model yang dibangun ini akan lebih kompleks dibandingkan dengan sistem model prey-predator yang telah dibangun sebelumnya. Nilai eigen yang diperoleh untuk titik kesetimbangan pada model SIRS berbeda tanda yang mengakibatkan sistem tidak stabil dan sistem model menjadi realistik pada titik kesetimbangan. Hal ini disebabkan karena solusi sistem tidak akan konvergen ke titik kesetimbangan. Atau sistem model sangat realistik sebab akan terjadi eliminasi populasi  $x$ ,  $y$ , dan  $z$  yang dengan kata lain ketiga populasi ini musnah. Sementara yang terjadi pada titik kesetimbangan kedua adalah eliminasi populasi  $y$  diikuti populasi  $z$ . Kondisi ini juga berarti terjadinya kepunahan pada populasi *infected* TB dan *recovered* TB.

Namun sistem model pada titik kesetimbangan ini sangat tidak realistik sebab nilai  $x$  pada titik kesetimbangan sangat besar dibandingkan dengan jumlah penduduk Kabupaten Belu yang pada 2008 hanya berjumlah 384182 jiwa. Demikian pun halnya dengan titik kesetimbangan endemik TB , sistem model kurang realistik sebab solusi sistem tidak konvergen ke titik kesetimbangan . Selain itu juga dipengaruhi oleh nilai negatif pada titik kesetimbangan yang sangat tidak mungkin terjadi untuk konteks pembicaraan mengenai jumlah penduduk.

# KESIMPULAN DAN SARAN

## □ Kesimpulan

Sistem model prey-predator penularan TB sebagai interaksi antara populasi dengan individu-individu yang negatif MyTB dengan populasi dengan individu-individu yang positif tertular MyTB mempunyai karakteristik epidemiologi yang berbeda dibandingkan dengan model SIRS dalam menggambarkan kondisi penularan TB di daerah Kabupaten Belu. Di Kabupaten Belu Nusa Tenggara Timur, kasus TB dapat dihilangkan dalam waktu yang sangat lama.

Sistem model SIRS penularan TB sebagai interaksi antara populasi dengan individu-individu negatif MyTB dengan populasi dengan individu-individu tertular MyTB tetapi belum TB dan dengan individu-individu yang sedang menderita TB memiliki karakteristik tersendiri di dalam menjelaskan kasus TB di Kabupaten Belu. Melalui aplikasi model pada kasus TB di Kabupaten Belu ini diketahui bahwa sistem model tidak stabil, yang artinya populasi *suspected* TB, *infector* TB, dan *recovered* TB akan ada selama kurun waktu tertentu.



## ❑ Saran

Melalui penelitian diharapkan partisipasi aktif dari seluruh lapisan masyarakat dalam menanggulangi masalah penularan TB di NTT, khususnya di daerah Kabupaten Belu. Sebab TB telah menjadi bahaya laten yang bukan hanya membutuhkan perhatian dan partisipasi aktif dari pemerintah dunia dan Indonesia, melainkan menjadi tugas dan tanggung jawab serta kewajiban kita semua. Keberhasilan penanggulangan TB akan menjadi penopang dalam pembangunan serta dapat memberikan manfaat yang cukup besar bagi segenap warga masyarakat dalam menciptakan lingkungan yang bebas TB.

Thank You!

